ÇOKLU GÖSTERİMLERLE PROBLEM ÇÖZME VE TEKNOLOJİNİN ROLÜ

A. Kürşat ERBAŞ
kursat@gmail.com
Orta Doğu Teknik Üniversitesi
Ortaöğretim Fen ve Matematik Alanları Eğitimi Bölümü
06531 Ankara - TÜRKİYE

ÖZET
Teknoloji tabanlı yaklaşımlar öğrencilere verileri inceleyerek örüntüleri saptamaları yoluyla varsayımlar formüle etmeleri ve sonrasında bunları test ederek sonuçlar çıkarmaları ve bu sonuçların değişik şartlardaki anlamlılığını saptayarak genellemelerde bulunmalarına izin vermektedir. Öğrenciler teknoloji ile varsayımlarını doğrulamak için sembolik (cebirsel), grafiksel (geometrik) ve sayısal (aritmetik) çözümleri eşzamanlı olarak göstererek çoklu durumları tasvir etmekte bir vasıta olarak kullanılabilmektedirler. Teknoloji çoklu gösterimlere (multiple-representations) imkan sağlaması özelliğiyle öğrencilere problem çözme sürecinde eşlik etmede güçlü bir araçtır. Bu çalışmada açık uçlu bir matematik sorusu örnek alınarak, hesap çizelgesi programı (spreadsheet) olarak *Excel*, grafik çizdirme programı olarak *Graphing Calculator*, ve devingen bir geometrik programı olarak *Geometer's Sketchpad* yardımıyla sembolik (cebirsel), grafiksel (geometrik) ve sayısal (aritmetik) olarak çoklu gösterimler yardımıyla tetkik edilmesi ve çözümlenmesi ele alınmaktadır.

Anahtar Sözcükler: Çoklu gösterim, cebirsel sembolik (cebirsel), grafiksel (geometrik) ve sayısal (aritmetik) çözümler, problem çözme, teknoloji, matematik eğitimi

PROBLEM SOLVING WITH MULTIPLE REPRESENTATIONS AND THE ROLE OF TECHNOLOGY

ABSTRACT
The technology-based approach allows students the opportunity to formulate conjectures by examining data to identify patterns, and then generalize their conclusion through testing their conjecture under different conditions. To verify conjectures, students can seek symbolic and graphic representations as a means to illustrate multiple cases simultaneously. Thus, technology is a powerful tool in assisting students in problem solving by allowing for multiple representations. In this presentation, an open-ended mathematics problem is analyzed and solved with multiple representations by using a spreadsheet software, a dynamic geometry software, and a graphical software.

Keywords: Multiple representations, symbolic, graphical and numerical solutions, problem solving, technology, mathematics education

1. GİRİŞ

Günümüz dünyasında artık varolan ve alışılagelmiş yaklaşımlarının yerine oldukça farklı bir matematik öğretim ve öğrenimi perspektifi yankı bulmaktadır (NCTM, 1989, 1991, 2000). Bu bağlamda, diğer derslerden, günlük hayattan kopuk, durağan bilgi ve becerilerin öne çıktığı bir tablonun yerine öğrenciyi etrafındaki dünyayı araştırma ve varsayımlar yoluyla görmesini etkin kılacak; matematiğin problem çözme, nedensellik ve iletişim olarak algılandığı bir çerçeve sunulmaktadır. Öğretmen artık matematiksel bilginin sahibi ve aktarıcısı olarak değil, matematiksel düşünce ve iletişimi öne çıkaran sorular sorarak öğrencinin konu ile bütünleşmesini kolaylaştırıcı bir pozisyonda görülmektedir. Çağdaş perspektifler işlemlerin mekanik ezberlenmesi, hesapsal algoritmalar, kalem-kağıt talimleri ve sembollerin manipülasyonu gibi şeyleri aşmış; artık matematik öğretmen ve öğrencilerinin analiz, problem bulma ve çözme, zengin kavramsal anlama gibi derin matematiksel düşünmeyi içeren yapılarla bütünleşmeleri desteklenmektedir. Teknoloji tüm bunlara ulaşma yolunda önemli bir vasıta olabilir.

Teknolojiyi başta eğitim olmak üzere yasamın her yönünde sadece bir araç olarak görmek teknolojinin potansiyel gücünü hafife almak veya göz ardı etmek demektir. Geçtiğimiz çeyrek asırda bilgisayar teknolojisindeki gelişmeler dünyadaki politik, sosyal ve ekonomik normlar üzerinde büyük değişikliklere yol açmış; yaşamın bir parçası daha da ötesinde bir yaşam biçimi haline gelmiş bulunmaktadır. Birkaç onyıl öncesindeki sınırlı kapasite ve bir oda büyüklüğündeki bilgisayarların yerini, günümüzde milyonlarca defa daha hızlı; grafiksel, etkileşimsel ve sembolik işlem yapma kapasitelerine sahip masaüstü ve avuç içine sığacak büyüklükte bilgisayarları almıştır. Bu bağlamda, matematiksel yapıların bilgisayar programlama ve algoritmalarında geniş ölçüde kullanılması, ve bunların hayatın her alanına uygulanması, özellikle matematiğin gelecek nesiller için öğrenim ve öğretimine ihtiyacı bir kat daha artırmıştır. Bu amaçla okul matematik müfredatının yarınki nesilleri, problem çözme ve eleştirisel düşünme becerilerinin gerekli ve değerli olduğu teknolojik dünyaya hazırlayacak şekilde düzenlenmesi ve değiştirilmesi esas olmalıdır. Bu çaba ve gayretler içerisinde teknolojinin matematik eğitimine entegrasyonun amaç olarak değil, öğrenci ve öğretmenlerin problem çözme ve eleştirisel düşünme becerilerinin geliştirilmesine vesile olarak algılanması önemlidir.

2. TEKNOLOJİ VE MATEMATİK EĞİTİMİ

Günümüzde teknoloji, bilhassa bilgisayara teknolojisi matematiğin sadece eğitim yönünü değil matematiğin kendisini de etkilemektedir. 1976 yılında Wolfgang Haken ve Kenneth Appel isimli iki matematikçinin Dört Renk (Four-Color) problemine getirdikleri çözüm (Appel & Haken, 1989), teknolojinin matematik ve felsefe camiasındaki yeni bir tartışmanın kaynağı olagelmiştir. Haken ve Appel ispatlarındaki bir varsayımın doğruluğunu hesapların büyüklüğü ve fazlalığı nedeniyle elle çözümün insan kapasitesinin üzerinde olması nedeniyle geliştirdikleri bir bilgisayar algoritması yardımıyla gerçekleştirmişlerdi. Bu durum, teknolojinin matematiğin temel içsel yapı ve değerlerini nasıl şekillendirdiği veya bu yöndeki bir değişimi gerektirdiğini göz önüne sermektedir ve neden matematik eğitiminin de bir parçası olması gerektiğini göstermektedir.

Teknoloji öğrencilere çoklu gösterimleri ve matematiksel ortamları araştırmaya izin vermesi dolayısıyla elzem ve heyecan verici bir araç olabilir. Öğretilen matematiği etkileyen ve öğrencilerin öğrenmesini artıran teknoloji, öğrenme ve öğretmede gereklidir (NCTM, 2000, s. 24). Teknoloji matematik becerilerinin öğrenilmesinin yerinin almamakta; aksine beceri seviyelerini gözetmeksizin tüm öğrencilere matematiksel düşünceyi ulaşılabilir kılmakta, aynı zamanda öğretmeni ise aktif angajman ve yükümlülükten salıvermemektedir. Teknoloji kullanımı öğrencilerin problem çözüm teknikleri, verilere çeşitli yönlerden bakmaları ve çözümlerinin ne kadar anlamlı ve geçerli olduğu konularında daha yaratıcı dolayısıyla daha iyi bir matematik anlayış ve öğrenmelerine yol açabilir. Teknoloji, sınırlı matematik bilgisinin yanı sıra sınırlı sembolik ve sayısal işlem yapma yetisine sahip öğrencilere problem ortamlarını araştırma ve çözme salahiyeti vermektedir. Bu bağlamda teknoloji, öğrencileri sadece can sıkıcı ve sürekli hesaplamalardan kurtarmakla kalmamakta, çoklu ortamların kullanılmasını da teşvik etmektedir.

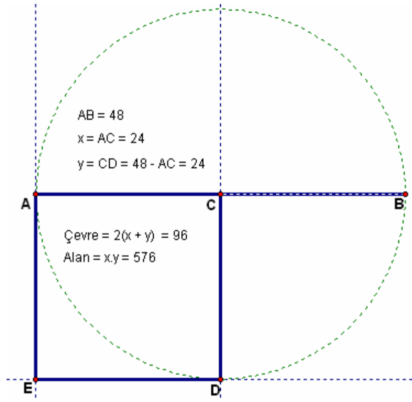
3. ÇOKLU GÖSTERİMLERLE PROBLEM ÇÖZME VE TEKNOLOJİNİN ROLÜ

Çoklu teknolojiler, özelliklede farklı bilgisayar programları problem çözme sürecinin değişik aşamalarını desteklemektedirler. Teknoloji tabanlı yaklaşımlar öğrencilere verileri inceleyerek örüntüleri saptamaları yoluyla varsayımlar formüle etmeleri ve sonrasında bunları test ederek sonuçlar çıkarmaları ve bu sonuçların değişik şartlardaki anlamlılığını saptayarak genellemelerde bulunmalarına izin vermektedir. Teknoloji yardımıyla öğrenciler verilen bir problemi çözme tetkiklerinde kolayca bir hesap çizelgesinden (spreadsheet) bir grafiğe veya devingen bir geometrik programına geçebilmektedirler. Öğrenciler teknoloji ile varsayımlarını doğrulamak için sembolik (cebirsel), grafik (geometrik) ve sayısal (aritmetik) gösterimleri eşzamanlı olarak göstererek çoklu durumları tasvir etmekte bir vasıta olarak kullanılabilmektedirler. Dahası, teknolojinin iyi kullanımı öğrencilere soyutsal ilkeleri çoklu gösterimler yoluyla somutlaştırma ve sonrasında daha üst bir seviyedeki soyutsallığa göre somut görünecek bir hale getirmelerine olanaklar tanımalıdır. Teknoloji çoklu gösterimlere (multiple-representations) imkan sağlaması özelliğiyle öğrencilere problem çözme sürecinde eşlik etmede güçlü bir araçtır. Özellikle, öğrencilerin tek bir problemi çoklu teknolojiler kullanılarak araştırması ve çözümü teşvik edildiğinde etkindir. Çoklu gösterimler öğrencilerin değişik düşünce yollarını tecrübe etmelerine, problem durumlarını daha iyi kavramalarına ve matematiksel kavramların anlaşılmasını artırmaya izin vermektedir.

Üstte anlatılan prensipler ışığında, teknolojinin matematiksel düşünce ve problem çözme becerisini çoklu gösterimlerle daha alt sınıf ve bilgi seviyelerindeki öğrencilere bile nasıl etkili ve ulaşılabilir kılacağını çoğunlukla lise ve üstü düzeyde, türev kavramının bir uygulaması olarak kalkulüs derslerinde görmeye alıştığımız aşağıdaki açık uçlu matematik sorusunu örnek alarak gösterebiliriz.

Ali, yeni atının otlayacağı alanın etrafını çevirmek amacıyla 96 metre çit almıştır. Ali'nin elindeki çitle çevirebileceği en geniş dikdörtgen alanın boyutları nedir? (Kaynak: InterMath Projesi, http://www.intermath-uga.gatech.edu)
Bu problem, hesap çizelgesi programı (spreadsheet) olarak *Excel*, grafik çizdirme programı olarak *Graphing Calculator*, ve devingen bir geometrik programı olarak *Geometer's Sketchpad* yardımıyla sembolik (cebirsel), grafiksel (geometrik) ve sayısal (aritmetik) olarak çoklu gösterimler yardımıyla tetkik edilip farklı yollardan çözümlenebilir.

Örneğin, bir öğrenci *Geometer's Sketchpad* kullanarak problemin görsel ve devingen bir gösterimini tasvir edebilir (Şekil 1). Bu öğrencinin problemi geometrik olarak inşa etmesine ve istediği gibi manipüle etmesine izin vererek gözlemlediği ve kurguladığı varsayımları test edebilmesine imkan sağlayabilir. Öğrenci C noktasını AB arasında istediği gibi oynatarak, buna bağlı olarak değişen yapı üzerinde hangi şeklin ve boyutların en büyük alanı ortaya çıkarttığını gözlemleyebilir. Buna göre 96 metre çit ile çevrilebilecek en büyük alan 576 m^2 olarak dikdörtgen 24'e 24 bir karesel alan olduğunda elde edilebileceği ortaya çıkmaktadır.



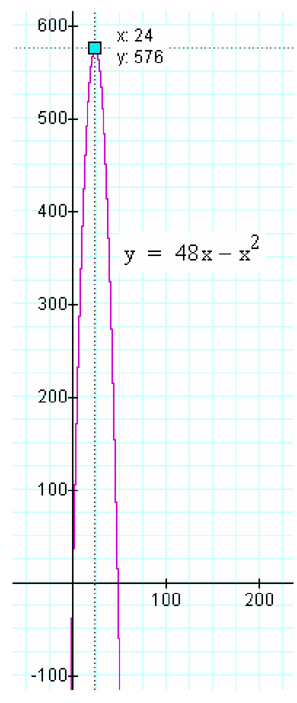
Şekil 1. Devingen geometri programı ile çit probleminin modellenmesi ve çözümü

Benzer şekilde bir öğrenci hesap çizelgesi programı kullanarak aynı sonuca sayısal olarak ulaşabilir. Dikdörtgenin boyunun 48 metreyi geçemeyeceği göz önüne alınarak, enin 96 ile boyun iki katının farkının yarısı olarak bulabileceği ve dikdörtgenin alan hesabının en çarpı boy olduğu bilgileri Şekil 2'de de görülebileceği gibi bir hesap çizelgesine programlanabilir. Böylece çevresi 96 metre olan olası dikdörtgenlerin boyutlarını ve buna bağlı alanları tablo halinde listelemek mümkün olacaktır. Buna göre en büyük alan 576 m^2 olarak gözlemlenirken, bunu ortaya çıkaran şeklin bir kare olduğu en ve boyunun 24 metre yani eşit olmalarından ortaya çıkacaktır. Bunun ötesinde, aynı problem hesap çizelgesi yardımıyla basitçe genişletilebilir. Örneğin, veriler hesap çizelgesinde çizdirilerek çitin eni ile alan arasındaki grafiksel ilişkinin bir parabol olduğu keşfedilebilir.

B2 | fx =(96-2*A2)/2

	A	B	C	D	E	F	G
1	*En*	*Boy*	*Alan*		*En*	*Boy*	*Alan*
2	1	47	47		25	23	575
3	2	46	92		26	22	572
4	3	45	135		27	21	567
5	4	44	176		28	20	560
6	5	43	215		29	19	551
7	6	42	252		30	18	540
8	7	41	287		31	17	527
9	8	40	320		32	16	512
10	9	39	351		33	15	495
11	10	38	380		34	14	476
12	11	37	407		35	13	455
13	12	36	432		36	12	432
14	13	35	455		37	11	407
15	14	34	476		38	10	380
16	15	33	495		39	9	351
17	16	32	512		40	8	320
18	17	31	527		41	7	287
19	18	30	540		42	6	252
20	19	29	551		43	5	215
21	20	28	560		44	4	176
22	21	27	567		45	3	135
23	22	26	572		46	2	92
24	23	25	575		47	1	47
25	***24***	***24***	***576***		48	0	0

Şekil 2. Hesap çizelgesi programı ile çit probleminin modellenmesi ve çözümü



Şekil 3. Grafik programı ile çit probleminin modellenmesi ve çözümü

Aynı problem cebirsel ve grafiksel olarak da çözümlenebilir. Şöyle ki; çitin eni x olsun. Çitin çevresi 96 olduğundan, çitin boyu $(48 - x)$ ve $0 < x < 48$ olacaktır. Çitin alanına y dersek; *y,* en ve boyun çarpımına, yani $x \cdot (48 - x) = 48x - x^2$'e eşit olacaktır. En büyük alanlı çiti oluşturmak istediğimizden, $y = 48x - x^2$ fonksiyonunun maksimum değeri Ali'nin istediği çitin alanına ve bunu sağlayan x değeri de bölgenin enini belirleyecektir. Klasik matematik müfredat ve eğitiminde türev kavramı sonrası çözümlenen bu problem teknolojik araçlar yardımıyla kolayca görsel veya grafiksel olarak çözümlenebilir. Fonksiyonun grafiğini *Graphing Calculator* programı ile çizdirdiğimizde, y'nin alabileceği en yüksek değerin 576 olduğu ve buna bağlı olarak enin 24 ve de dolayısıyla boyun da (48–x) bağıntısından gereği 24 olduğu gözlemlenebilir (Şekil 3). Alternatif olarak, genel olarak $y = ax^2 + bx + c$ ile ifade edilen bir parabolün maksimum/minimum değerini veren tepe noktasının x koordinatı –b/2a değeridir. Buna göre, yukarıdaki alan fonksiyonun tepe noktasının x koordinatı –48/2(-1) = 24 olarak, y koordinatı ise $y = 48(24) – (24)^2 = 576$ olarak bulunabilir.

5. SONUÇ

Sonuç olarak teknoloji, problem çözme etkinliklerine katılma ve angaje olmak için bir yol sağlamakta ve matematiksel istidatı teşvik etmektedir. Öğretmen tarafından desteklendiğinde, teknolojik araçlar öğrencilere gözlem ve deneme yaparak, var olan örüntüleri, ilişkileri, eğilimleri kullanarak varsayımlarda ve genellemelerde bulunmalarına için matematiksel ortamları araştırma ve işlemelerine imkan tanımaktadır. Bu nedenlerle öğretmenler matematiğin tüm alanlarında öğrencilerin matematiksel düşüncelerinin, kavramların ve problem çözme durumlarının anlaşılmasının desteklenmesi için çoklu gösterimlerin kullanımını vurgulamaları ve teşvik etmelidirler.

5.1. Tartışma: Okul Reformunda Teknoloji ve Öğretmen Eğitimi

Teknoloji, eğitim reformunda ve bunu üstlenen bazı okullarda önemli roller oynamakla beraber (örneğin, bakınız, Birman et al, 1997; Means & Olson, 1995; President's Committee of Advisors on Science and Technology, 1997), teknolojinin kendisi anlamlı bir eğitim reformunu etkileyebilmekten uzaktır (Pea, 1996). Eğitimcilerin sadece teknolojiyi kendi matematik öğretimlerine bütünleştirmesi için değil, teknolojinin sorgu, işletim ve problem çözmeyi destekleyebilecek potansiyelinin etkili kılınması ve salıverilebilmesi için desteklenmesi ve hazırlanmaları gerekmektedir (Means & Olson, 1995). Ancak, reform, yeni standart ve yaklaşımların ortaya çıkmasıyla veya basit olarak istenildiği için gerçekleşmemekte, reform hareketlerine birtakım engeller bulunmaktadır. Alan yazının bakıldığında bu engellerden birisi, hizmet öncesi ve sonrası öğretmenlerinin neyin matematiği oluşturduğuna yönelik yaygın ve esnek inanışları olarak görülmektedir (Anderson & Piazza, 1996; Ball, 1988; Dossey, 1992; Thompson, 1992). Reform dokümanlarının hemen hepsinde geniş yer eden ortak bir tema 'Öğrencilerin ne öğrendikleri temelde nasıl öğrendikleri ile bağlantılıdır' (NCTM, 1989, s. 5; NCTM, 1991; s. 21) Bu nedenle, eğer öğrencilerimizin matematiği bir kurallar ve işlemler yumağı olarak değil, anlamlı ve devingen ama ilintili olarak görmelerini arzuluyorsak, öğretmenlerin matematik görüşleri üzerinde bir etki yapmak zorunluluğundayız. Tüm faydalarına rağmen öğretmenler çoklu gösterimlerin ve bu tür gösterimlerden yararlanan açık-uçlu problemlerin teknoloji kullanımı ile çözme sürecine dahil edilmesi konusunda, temelde kısıtlı zaman, geleneksel matematik öğretiminin sınırlılıkları ve daha da önemlisi bu konulardaki yetersiz bilgi ve görüşleri nedenleriyle güçlük çekmektedirler. Bu nedenlerle, öğretmenlerin anlamlı bir matematik öğretmelerini istiyorsak, anlamlı bir matematik deneyimi kazanmalarını sağlamak durumundayız. Cohen ve Ball'ın (1990) dediği gibi, 'Öğretmenler hiç görmedikleri ve tecrübe etmedikleri bir matematiği nasıl aynı şekilde öğretebilirler ki?' Öğretmenlerden onlara sadece öyle söylendiği ve nasıl yapmaları gerektiği anlatıldığı için reform yanlısı bir çizgide öğretmeleri beklenemez. Matematiksel düşünceyi anlamlı bir şekilde modellemeleri ve öğretebilmeleri için öğretmenlerin ilintili matematiği öğrenci olarak; emsallerinden ve keşfetme sürecinden istifade ederek tecrübe etmesi gereklidir. Eğer kısır döngüleri kırmak istiyorsak; ilk, orta ve yüksek öğretimin tüm basamaklarında daha iyi öğretmen modellerine ihtiyacımız olduğunu göz ardı etmemeliyiz.

KAYNAKÇA

Anderson, D. S.and Piazza, J. A. (1996). Changing Beliefs: Teaching and Learning Mathematics in Constructivist Preservice Classrooms. *Action in Teacher Education 18 (2)*, 51-62.

Appel, K. & Haken, W. (1989) *Every Planar Map is Four-Colorable.* Providence, RI: American Mathematical Society.

Ball, D. (1988). Unlearning to teach mathematics. *For the Learning of Mathematics, 8(1)*, 40-48.

Birman, B., et al. (1997). *The effectiveness of using technology in K-12 education: A preliminary framework and review.* Washington, DC: American Institutes for Research.

Cohen, D., & Ball, D. (1990). Policy and Practice: An Overview. *Educational Evaluation and Policy Analysis, 12(3)*, 347-353.

Dossey, J. (1992). The nature of mathematics: Its role and its influence. In D. Grouws (Ed.), *Handbook of research on mathematics teaching and learning* (pp. 39-48). New York: MacMillan Publishing Company.

Means, B., & Olson, K. (1995). *Technology's role in education reform: Findings from a national study of innovating schools*. Washington, DC: OERI.

National Council of Teachers of Mathematics (1989). *Curriculum and evaluation standards for school mathematics*. Reston, VA: Author.

National Council of Teachers of Mathematics (1991). *Professional standards for teaching mathematics*. Reston, VA: Author.

National Council of Teachers of Mathematics (2000). *Principles and standards for school mathematics*. Reston, VA: Author.

Pea, R. (1996). Learning and teaching with educational technologies. In H. Walberg & G.D. Haertel (Eds.), *Educational Psychology: Effective practices and policies*. Berkeley, CA: McCutchan.

President's Committee of Advisors on Science and Technology (1997). *Report to the President on the Use of Technology to Strengthen K-12 Education in the United States*. (President Report). Reston, Va.: PCAST.

Thompson, A. (1992). Teachers' beliefs and conceptions: A synthesis of the research. In D. Grouws (Ed.), *Handbook of research on mathematics teaching and learning* (pp. 127-146). New York: MacMillan Publishing Company.